Macroéconomie de la Croissance

Modèle de Ramsey

Chahir Zaki

Paris 1/FESP

Premier semestre, 2013

Plan

La croissance optimale

Quelle part de son revenu un pays peut-il dépenser et quelle part doit-il investir ?

Règle d'or : réponse partielle, limitée à la comparaison de SCE

Problématique de la croissance optimale : optique intertemporelle

Il s'agit de déterminer, parmi tous les sentiers de croissance de l'économie possibles à partir des conditions initiales, celui que choisirait un planificateur bienveillant maximisant un critère de bien-être social intertemporel reflétant les préférences en matière de consommation des agents, sous la contrainte de ressources de l'économie

Le long de ce sentier optimal, la part du revenu consacrée à chaque instant à la consommation et celle consacrée à l'épargne sont les meilleures du point de vue du critère de bien-être social adopté par le planificateur

Approche clairement normative

Le modèle de Ramsey

- C'est un modèle de croissance qui intègre explicitement un comportement de consommation des ménages.
- L'épargne ne sera donc plus déterminée à travers une propension moyenne exogène.
- Les individus ont un horizon infini. Plutôtt qu'une vie infinie, cela correspond à une prise en compte, par chaque génération, de l'intérêt des générations futures, de manière altruiste.

Plan

Hypothèses

Economie « à la Solow »

Fonction de production néoclassique, à rendements d'échelle constants $y = f(k)$

Consommation par tête c, investissement brut par tête i, avec $c + i = f(k)$

Croissance de la population au taux n

Dépréciation du capital au taux δ

Dans un premier temps pas de progrès technique

Contrairement au modèle de Solow dans lequel le taux d'épargne est exogène, le comportement de consommation et d'épargne des agents est ici endogène

Hypothèses

Fonction d'utilité est $u(c)$, où u est croissante et concave
On suppose l'existence d'un planificateur central bienveillant qui prend soin des intérêts des agents et s'occupe de déterminer le meilleur sentier de consommation au regard d'un *critère de bien-être social intertemporel*, sous une contrainte de ressources de l'économie
Ici, critère dit « utilitariste escompté » bien-être intertemporel du ménage représentatif, dont on suppose la durée de vie infinie
Programme du planificateur :

$$\begin{cases} \max V = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(c) dt \\ \dot{k} = f(k) - c - (n+\delta)k \\ k_0 = K_0/L_0 \quad \text{donné} \end{cases}$$

avec ρ le taux de préférence pour le présent, supposé constant et strictement positif

Problème d'optimisation

- Le planificateur central cherche à maximiser le bien-être social à chaque moment du temps.
- Il doit donc déterminer un sentier de consommation optimale qui tient compte des caractéristiques de l'économie.
- Ce sentier doit établir, à chaque moment, un arbitrage entre la consommation présente et la consommation future qui va profiter de l'investissement et donc de l'épargne.

Problème d'optimisation

- Quand on considère l'évolution dynamique de cette économie, à chaque moment du temps, l'état du système peut être décrit avec k.
- Cette variable est donc la variable d'état. L'évolution de cette variable est donnée par $\dot{k}$ et elle est déterminée d'une part par l'état k mais d'autre part, par une autre variable qui la commande, c est donc la variable de commande.
- La contrainte nous donne la manière dont la commande influence l'évolution de l'état de ce système. C'est pour cette raison qu'on l'appelle l'équation de mouvement ou l'équation d'état.
- La contrainte tient compte de l'état initial de ce système.
- La résolution de ce système revient à chercher une commande optimale, qui maximise l'utilité des agents à chaque moment du temps: c'est une fonction du temps.
- On fait le Hamiltonien et on arrive à la condition d'optimalité.

Résolution du modèle

Condition nécessaire d'optimalité :
Soit $\sigma(c) = -\frac{u'(c)}{cu''(c)}$ l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation
Condition de Keynes–Ramsey :

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma(c)(f'(k) - n - \delta - \rho)$$

Le taux de croissance de la consommation par tête dépend de l'écart entre la productivité marginale du capital par tête et le taux de croissance démographique augmenté du taux de dépréciation et du taux de préférence pour le présent, écart modulé par l'élasticité de substitution intertemporelle

Résolution du modèle

- La règle de Keynes-Ramsey nous indique que la consommation augmente (reste constante/diminue) selon que le produit marginal du capital (net de la croissance de la population) est plus (autant/moins) élevé que le taux de préférence pour le présent:
  - Plus le produit marginal du capital est élevé par rapport au taux de préférence pour le présent, plus est-il intéressant de réduire la consommation présente pour profiter d'une consommation future plus élevée.
  - Si ce produit marginal est fort initialement, la consommation sera croissante dans le temps sur le sentier optimal.
- Le rôle de l'élasticité de substitution apparaît à ce niveau : plus élevée est cette élasticité, plus facile il est de sacrifier la consommation présente pour profiter de la consommation future et donc, pour un niveau excédentaire du produit marginal (par rapport à la préférence pour le prsent), plus fort est le taux de variation de la consommation.

Commentaire

- A la différence du modèle de Solow, le taux d'épargne n'est plus exogène et constant. Il est déterminé implicitement par les choix intertemporels de consommation.

Plan

L'état stationnaire

Existe-t-il une *croissance optimale équilibrée* ?
Système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k) - c - (n+\delta)k \\ \frac{\dot{c}}{c} = \sigma(c)(f'(k) - n - \delta - \rho) \end{cases}$$

Solution stationnaire caractérisée par un capital et une consommation par tête constants : $\dot{k} = 0$ et $\dot{c} = 0$:

$$\begin{cases} f(k^*) = c^* + (n+\delta)k^* \\ f'(k^*) = n + \delta + \rho \end{cases}$$

La seconde équation est la *règle d'or modifiée*
Règle d'or (rappel) :

$$f'(k_g^*) = n + \delta$$

k^* est inférieur à k_g^*, le montant de la réduction dépendant de ρ, taux de préférence pour le présent (impatience)

L'état stationnaire

Taux d'épargne :

$$s^* = \frac{f(k^*) - c^*}{f(k^*)} = (n+\delta)\frac{k^*}{f(k^*)}$$

Cas Cobb–Douglas $f(k) = k^\alpha$: $f(k)/k = Ak^{\alpha-1} = f'(k)/\alpha$

$$s^* = \alpha\frac{n+\delta}{n+\delta+\rho}$$

Taux d'épargne de la règle d'or dans le cas Cobb–Douglas (rappel) :

$$s_g = \alpha$$

Ici, sur le SCE, le planificateur choisit un taux d'épargne inférieur à celui de la règle d'or, en raison de la préférence pour le présent des agents, qui traduit leur impatience et les pousse à consommer davantage et à épargner moins

L'état stationnaire: remarques

- La première équation $f(k^*) - c^* = (n+\delta)k$ représente la condition de stationnarité du capital et implique que l'effort d'épargne sur le sentier de croissance régulière coïncide avec le capital requis pour que son taux de croissance soit de n.
- La deuxième équation $f'(k^*) = n + \delta + \rho$ nous informe sur le sentier de croissance régulière sélectionné par les décisions endogènes d'épargne: elle correspond à la condition de la règle d'or mais avec le terme ρ (règle d'or modifiée).
- L'intensité capitalistique est inférieure à celle de la règle d'or. Le gain permanent, mais futur, à se situer sur le sentier de la règle d'or est compensé par le gain transitoire mais présent de ne pas épargner de façon plus intense.
- La prise en compte d'une préférence pour le présent rend optimale cette décision: la règle d'or modifiée est bien la condition optimale de ce problème, au regard des préférences intertemporelles, même si la consommation stationnaire n'est pas maximale.

L'état stationnaire: remarques

- Une situation d'inefficience dynamique est impossible, l'intensité capitalistique étant toujours inférieure à celle de la règle d'or. Les décisions d'épargne d'agents rationnels déterminent un sentier de croissance régulière optimal.
- A long terme, la préférence pour le présent joue le rôle du taux d'épargne dans le modèle de Solow. Sa diminution augmente l'intensité capitalistique stationnaire. Ainsi, derrière l'influence des taux d'épargne et d'investissement dans les différences internationales de revenu par tête se cacheraient les préférences intertemporelles différentes: les pays dont la préférence pour le présent des ménages serait élevée accumuleraient moins de capital.

Plan

La stabilité autour de l'état stationnaire

Diagramme de phases représentant les trajectoires possibles de l'économie dans le plan (k, c)

- Lieu des points vérifiant $\dot{k} = 0$: $c = f(k) - (\delta + n)k$
  Courbe passant par l'origine et par le point A de coordonnées $(k^0, 0)$, avec $f(k^0) = (n + \delta)k^0$
  Courbe qui atteint son maximum au point C en lequel on a $\frac{dc}{dk} = f'(k) - (n + \delta) = 0 \iff f'(k) = n + \delta$
  C est donc le point de la règle d'or, de coordonnées (k_g^*, c_g^*)
- Lieu des points vérifiant $\dot{c} = 0$: droite verticale d'abscisse k^*, le stock de capital par tête de la règle d'or modifiée
- Intersection des courbes $\dot{k} = 0$ et $\dot{c} = 0$ au point E qui est l'équilibre stationnaire de l'économie
- Flèches : indiquent la façon dont évoluent capital et consommation par tête à partir d'un point initial situé dans chacun des secteurs du plan délimités par les courbes $\dot{k} = 0$ et $\dot{c} = 0$

- Au dessus de la courbe $\dot{k} = 0$, pour un niveau donné de k la consommation par tête c est trop élevée. $f(k) - c - (n + \delta)k$ est donc trop faible, et $\dot{k} < 0$. C'est l'inverse en dessous de la courbe.
- À droite de la courbe $\dot{c} = 0$, pour un niveau donné de c le stock de capital par tête k est trop élevé ($> k^*$). $f'(k)$ est donc trop faible et $\dot{c} = \sigma(c)c(f'(k) - \delta - n - \rho)$ est négatif. C'est l'inverse à gauche de la courbe.

E est un *point-selle*
Branche stable représentée sur la figure par le lieu BB'
Le système converge vers l'état stationnaire si et seulement si il démarre d'un point situé sur la branche stable

Le diagramme de phase

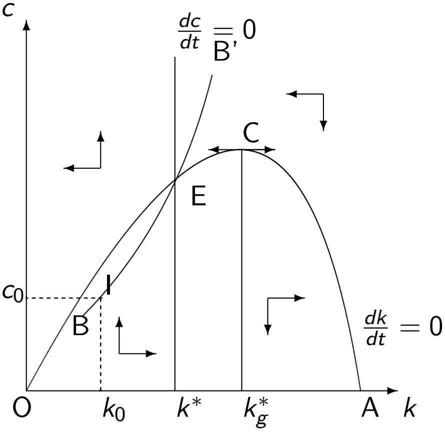

FIG.: Le diagramme de phases

Le diagramme de phase

- L'espace est divisé en quatre régions, les flèches indiquent la direction de c et k dans chaque région. Seules les régions sud-ouest et nord-est permettent la convergence vers l'état régulier c^* et k^*.
- C'est donc dans ces deux régions que passe le bras stable qui décrit la dynamique convergente de c et k. C'est le sentier selle. Le modèle est donc stable au sens du point selle. En suivant le sentier selle, c et k convergent vers c^* et k^*. Les autres sentiers ne convergent pas vers l'état régulier.

Plan

Le modèle de Ramsey avec progrès technique

Par rapport au modèle de Solow :

- Le taux d'épargne est maintenant endogène, ajusté à chaque instant de manière optimale par le planificateur. Sur le SCE, le taux d'épargne optimal n'est pas celui de la règle d'or mais lui est en général inférieur, en raison de l'impatience de la société
- Les conclusions du modèle de Solow sont peu modifiées : l'économie se déplace à long terme le long d'un SCE au taux constant n ou $n + \lambda$, et ce sentier est stable ; l'économie partant d'une condition initiale quelconque converge toujours à long terme vers ce SCE
- Les problèmes d'inefficience dynamique et d'impossibilité de comparer diverses trajectoires correspondant à divers taux d'épargne ne se posent plus ici, puisque le planificateur choisit le meilleur taux d'épargne et la meilleure trajectoire de consommation au regard du critère de bien-être social adopté

Références

- Cours de Katheline Schubert, UP1.
- La croissance économique, Barro et Sala-i-Martin, chapitre 1.
- La croissance, Hairault, chapitre 4.
- Le cours de croissance de Yizoglu Murat.