جامعة القاهرة

كلية الزراعة - قسم المحاصيل

الرياضيات

الأستاذ الدكتور

ضياء أحمد القاضي

كود	الفصل الدراسى
102	2015-2016

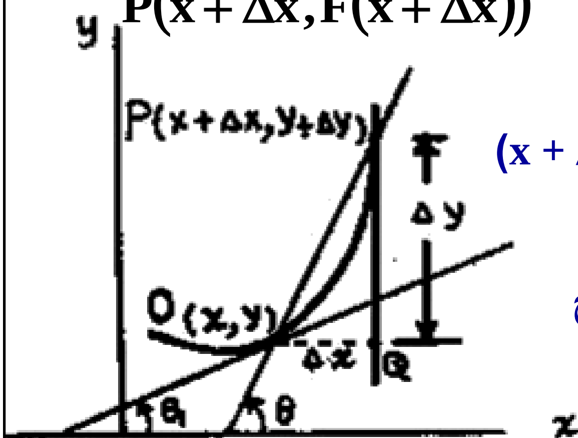
التفاضل

DIFFERENTIATION

القواعد الأساسية للتفاضل

تعتبر المهمة الأساسية لعلم التفاضل **هو ايجاد مقياس للطريقة التى تتغير بها دالة كلما تغيرت قيمة المتغير المستقل**. ومن الاستعراض السابق لموضوع الدالة، علمنا أنه إذا تغير المتغير المستقل x لدالة ما تفيرت تبعاً له قيمة الدالة. فإذا كانت $y = f(x)$ وحدث تغير فى x مقداره Δx فإن الدالة تتغير تغيراً مناظراً قدره Δy.

$$P(x+\Delta x, F(x+\Delta x))$$



$$(x, f(x))$$

فعندما نأخذ x القيمة $(x + \Delta x)$ فإن y تأخذ القيمة المقابلة $(y + \Delta y)$ كما هو موضح فى الشكل التالى:

فاذا فرضنا ان النقطة O (x , y) تقع على منحنى هذه الدالة، والنقطة P(x + Δx , y + Δ y) هى نقطة أخرى على المنحنى قريبة من O، فنجد أن:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{PQ}{OQ} = \tan\theta$$

أى أن $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ **تساوى ميل الوتر OP، وعندما تؤول Δx الى الصفر تتحرك النقطة P على المنحنى وتقترب شيئاً فشيئاً من النقطة O وحيث يدور المستقيم OP حول O حتى يصبح فى النهاية مماساً لمنحنى الدالة عند O.**

وبذلك فإن ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة O =

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta_1$$

= معدل تغير الدالة y بالنسبة الى x عند النقطة O

ويطلق على معدل تغير دالة ما بالنسبة لمتغيرها بالمشتقة الأولى (المعامل التفاضلى الأول) لهذه الدالة ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{dy}{dx} \ , \ D_X y \ , \ y' \ , \ f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مثال

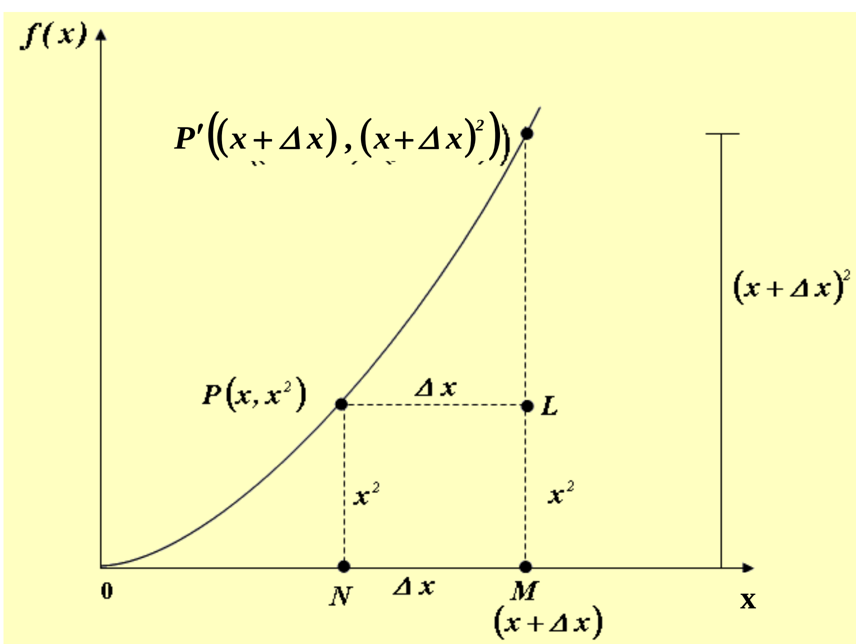
أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = x^2$ عند أى نقطة

الحل

قيمة هذه الدالة عند أى نقطة P هو $Np = x^2$

وقيمتها عند `P هى $Mp` = (x+\Delta x)^2$ كما هو موضح بالشكل

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$



وبالقسمة على Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$D_x y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

$$D_x y = 2x$$

تفاضل الدوال المثلثية
Differentiation of Trigonometric

تفاضل الدوال المثلثية
Differentiation of Trigonometric

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

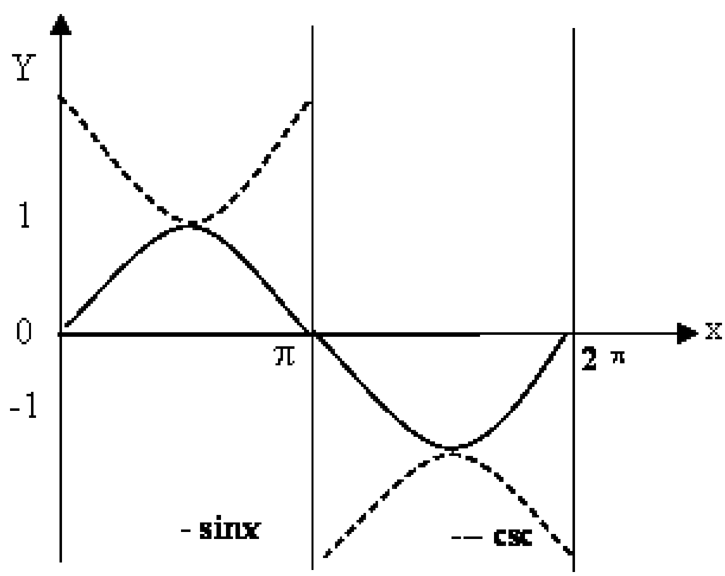
$$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

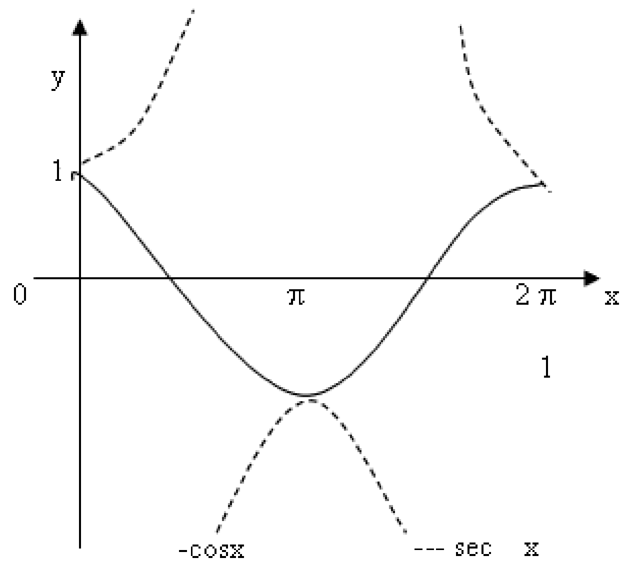
$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$$



(جـ)



(د)

وفيما يلي بعض العلاقات الرئيسية بين تلك الدوال :

tan x = sin x / cos x , cot x = cos x / sin x

cot x = 1 / tan x , sec x = 1 / cos x

csc x = 1 / sin x , $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

sin (- x) = – sin x , cos (– x) = cos x

tan (– x) = – tan x

sin (x + y) = sin x cos y + cos x sin y

cos (x + y) = cos x cos y - sin x sin y)

المشتقة الأولي للدوال المثلثية

Derivatives of trigonometric functions

أولاً: y = sin x :

يثبت أن :

$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$

$= \sin x \cos(\Delta x) + \cos x \sin(\Delta x) - \sin x$

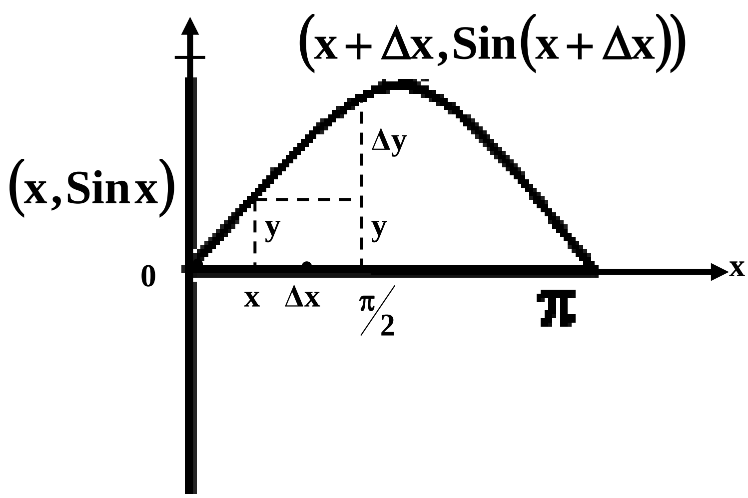
ثم بالقسمة علي (Δ x)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\sin x \frac{\cos(\Delta x)}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\sin x}{\Delta x} \right)$$

وحيث أن:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin \Delta x = \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos \Delta x = 1$$



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sin x \frac{\cos(\Delta x)}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\sin x}{\Delta x} \right)$$

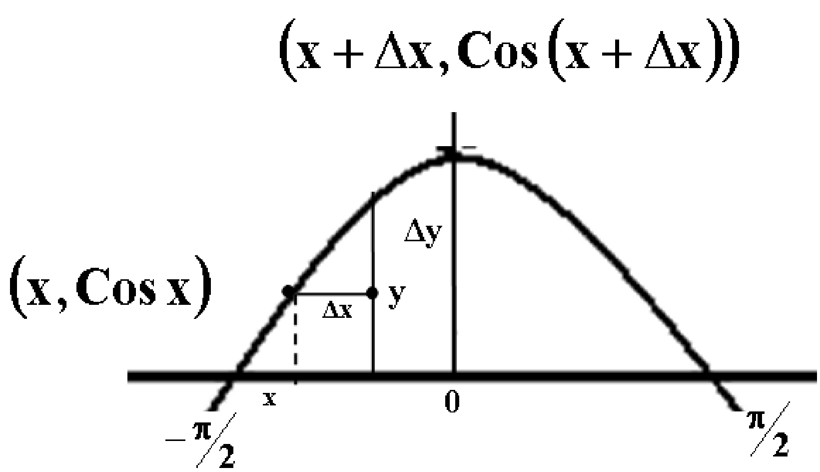
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sin x}{\Delta x} + \cos x - \frac{\sin x}{\Delta x} \right) = \cos x$$

ثانياً $y = \cos x$:

عرفنا سابقاً المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ كما يلي

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x) / \Delta x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -$$

ثالثاً $: y = \tan x$

من تعريفنا السابق $: y = \tan x = \sin x / \cos x$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

أمثلة :ـ

(١) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \sqrt{\sin x}$

الحـــــــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}}\right] \cdot \left[\frac{d}{dx}(\sin x)\right]$$

$$= \cos x / (2\sqrt{\sin x})$$

(٢) أوجد $f'(x)$ إذا كانت

$$f(x) = \cos \frac{x}{2}$$

الحـــــــــل

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\cos \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$$

تمرين (1) أوجد $D_x y$

إذا كانت $y = \sin^2 x$

الحـــــــــل

$$D_x y = \frac{d}{dx}(\sin x)^2 = 2 \sin x \cos x$$

$$= \sin 2x$$

تفاضل الدوال المثلثية العكسية
Differentiation of Inverse Trigonometric Functions

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x|<1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x|<1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2} \quad , \quad x\in R$$

تفاضل الدوال المثلثية العكسية
Differentiation of Inverse Trigonometric Functions

$$\frac{d}{dx}\left(\cot x\right)=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x|>1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\csc x\right)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x|>1$$

تفاضل الدوال المثلثية العكسية

Differentiation of Inverse Trigonometric Functions

بناء علي مناقشتنا السابقة للدالة العكسية $f^{-1}(x)$
في الفصلين الأول والثالث

نعرف الدوال المثلثية العكسية كما يلي:

(1) $y = \arc\sin x = \sin^{-1} x$

إذا وفقط إذا كانت :

$$x = \sin y \;, \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

(2) $y = \text{arc}\cos x = \cos^{-1} x$

إذا وفقط إذا كانت :

$$x = \cos y \;, \quad 0 \le y \le \pi$$

(3) $y = \arctan x = \tan^{-1} x$

إذا وفقط إذا كانت

$$x = \tan y \;, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

(4) $y = \text{arccot}\, x = \cot^{-1} x$

إذا وفقط إذا كانت :

$$x = \cot y \;, \quad 0 < y < \pi$$

(5) $y = \text{arcsec}\, x = \sec^{-1} x$

إذا وفقط إذا كانت :

$x = \sec y \; , \; 0 \le y \le \pi \; , \; y \ne \frac{\pi}{2}$

(6) $y = \text{arccsc}\, x = \csc^{-1} x$

إذا وفقط إذا كانت :

$x = \csc y \; , \; -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \; , \; y \ne 0$

تفاضل $y = \sin^{-1} x \; , \; y = \cos^{-1} x$

أ) إذا كانت :

$y = \sin^{-1} x$

$x = \sin y \; , \; -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$\frac{dx}{dy} = \cos y \; , \; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$

since : $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x| < 1$$

ب) إذا كانت :

$y = \cos^{-1} x \qquad x = \cos y \quad , \quad 0 \le y \le \pi$

فيمكننا علي غرار ما سبق (أ) برهان أن :

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x| < 1$$

تفاضل $y = \cot^{-1} x \quad , \quad y = \tan^{-1} x$

$y = \tan^{-1} x$

$x = \tan y \quad , -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad x \in R$$

تفاضل الدوال الأسية واللوغاريتمية

Differentiation of Exponential and logarithmic Functions

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right)=a^x \ln a$$

$$d\left(\ln x\right)=x^{-1}$$

$$d\left(\log_a x\right)=x^{-1}\log_a e$$

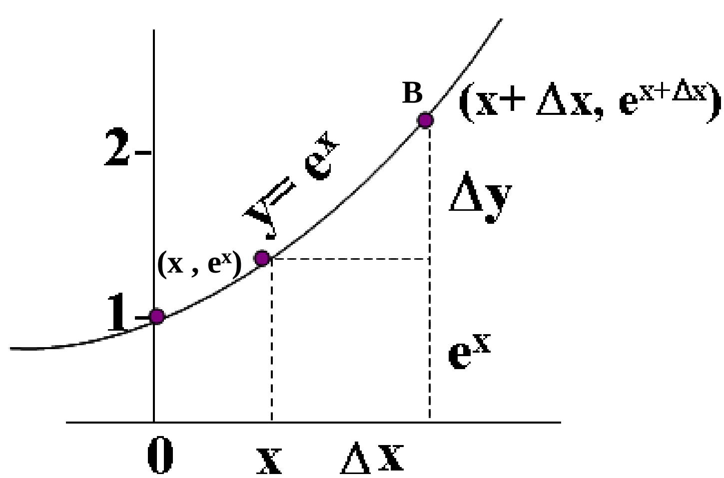
تفاضل الدالة $y = e^x$

$$\text{if} \quad y = e^x \quad \text{then} \quad \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x \quad = e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right) = e^x$$



مثال: أوجد $D_v\, y$ إذا كانت $y = e^{5v}$

$$\frac{d}{dv}(e^{5v}) = 5\, e^{5v}$$

تفاضل الدالة $y = 1n\ x$

إذا كانت $y = 1n\ x$ فأن $x = e^{y}$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = e^{y} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{y}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(1n\ x) = x^{-1}$$

تفاضل الدالة $y = \log_a x$, $: a \in R^{+}$

$$y = \log_a x = (\log_e x)(\log_a e)$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = x^{-1} \log_a e$$

تفاضل الدالة $y = a^x \;,\; a \in R^+$:

$y = a^x$

$\ln y = x \ln a \quad \text{or} \quad x = (\ln y) / (\ln a)$

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{\ln a}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$