Loop analysis :-

الهدف
① objective :- get all **Loops** Currents.

الطريقة
② Method :- write KVL for each Loop, so if we have n Loops, then we have n equations (KVL eqn. for each Loop) and we have n unknowns (Loop Current for each Loop). Then, we put these n eqns. in matrix form.

$$\underset{n\times n}{[R]}\,\underset{n\times 1}{[I]} = \underset{n\times 1}{[V]}$$

تلم
[R] → Resistors matrix → gathers all Resistors in the Circuit.

[I] → Unknown vector → the n unknown Loop Currents.

[V] → Batteries vector → gathers all Batteries in the Circuit.

Then, we use Cramer's method to get [I].

* لغاية دلوقتي الموضوع مش أكتر من أننا بنحل كذا معادلة في كذا مجهول ولكن بطريقة "أشيك" (طريقة المحددات والمصفوفات)، وهذا كنا نستطيع عمله في السنوات السابقة فما هو الجديد هنا ؟

الجديد هنا: أننا نستطيع أن نكون الـ [R], [V] $\boxed{\text{بدون}}$ كتابة معادلات الـ KVL أصلاً. ثم نستخدم طريقة Krammer لإيجاد [I]
(مهمة جداً)

التجهيزات اللازمة
③ Pre-requirements :-

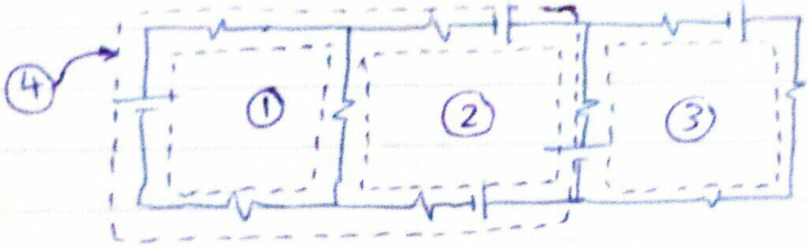
ⓐ Convert all Current Sources into Voltage Sources.
لأن الـ Current Sources ليست مناسبة للـ KVL كما نعلم، لأن الـ Loop لا ينبغي لها أن تمر على أى Current Source.

تخلص من
ⓑ get rid of all Cross-over, so that the Loops are clear for you ⇒ Network has to be 'planar', i.e., is drawn in 2-D
واضحة

STEPS

STEP ① choose the Loops such that no Loop can be constructed from other Loops you chose them also.
يعنى الـ Loops اللى هتختارهم، لا يكون فيهم Loop يمكن تكوينها بـ Loops أخرى انت أخذتهم معك فعلاً.

EX:-



مثلاً فى هذه المسألة لا يمكن اختيار Loops 1,2,3,4 لأن Loop.4 يمكن تكوينها بـ Loop 1,2 ، وانت أخذت (اخترت) Loops 1,2 فعلاً.
* معنى يمكن تكوين Loop.4 بـ Loops 1,2 :- أن كل عناصر Loop.4 موجودة بالفعل إما فى Loop.1 أو فى Loop.2.

ولكن يمكن اختيار Loops 1,3,4 ، لأن Loop.4 لا يمكن تكوينها بـ Loops 1,3 ، ولكن يمكن تكوينها بـ Loops 1,2 ، ولكننا لم نأخذ Loop.2 فى اختيارنا ، لذلك اختيار Loop.4 معنا هو اختيار صحيح.

* علشان ما تلخبطش نفسك :- اختار الـ Loops بحيث لا يمكن فكها لـ Loops أصغر. يعنى فى هذا المثال اختار Loops 1,2,3 فأى واحدة فيهم لا يمكن فكها لـ Loops أصغر منها أصلاً.

→ To get the number of independent loops, use eqn

$$\boxed{\# \text{ loops} = b_e - (n_e - 1) = b - (n - 1)}$$

$b_e \equiv$ number of essential branches

$b \equiv$ ~ ~ branches

$n_e \equiv$ number of essential nodes

$n \equiv$ ~ ~ nodes

node $\equiv$ Any point connecting two or more elements

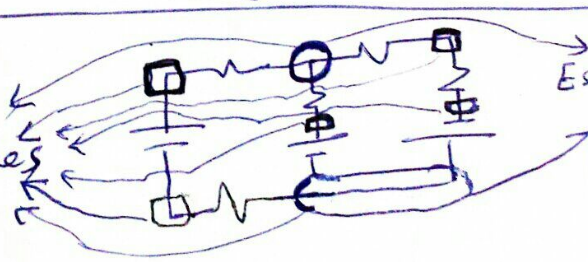
essential node $\equiv$ ~ ~ ~ more than 2 ~

branch $\equiv$ path connecting 2 nodes

essential branch $\equiv$ ~ ~ 2 essential nodes without passing through an essential node

---

Ex

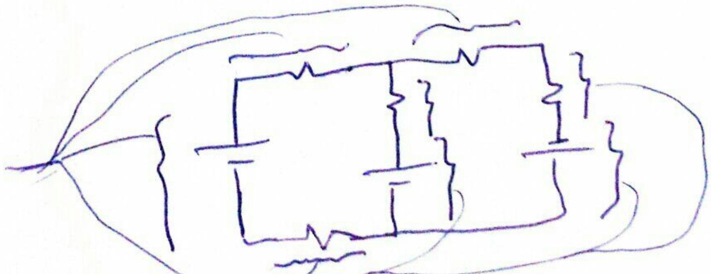


nodes

Essential nodes

$\boxed{n_e = 2}$

$\boxed{n = 7}$



branches

$\boxed{b = 8}$

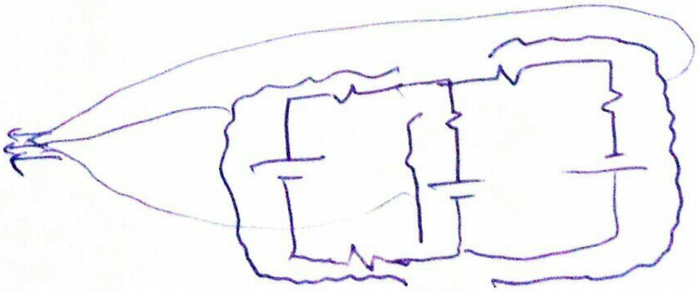
loops

$= b_e - (n_e - 1)$

$= 3 - (2 - 1) = 2$

$= b - (n - 1)$

$= 8 - (7 - 1) = 2$



Essential branches

$\boxed{b_e = 3}$

P.2''

proof that

$$\boxed{\#\text{loops} = b_e - (n_e - 1)}$$

branches = # unknowns currents = # unknowns

eqns = # KCL eqns + # KVL eqns

KVL eqns → # loops over which we need to write KVL

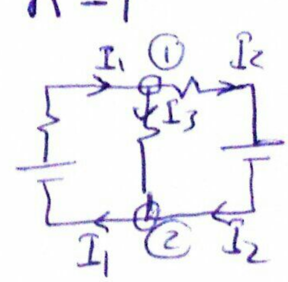
∴ # loops over which we need to write KVL

= # KVL eqns = # eqns − # KCL eqns

eqns = # unknowns = # branches = b

∴ # loops = b − # KCL eqns

indep. KCL eqns = # nodes − 1 = n − 1



KCL @ (1) → $I_1 = I_2 + I_3$ → (1)

" " (2) → $I_2 + I_3 = I_1$ → (2)

Eqns (1) & (2) are the same, so 2 nodes give 1 KCL eqn

1 → = # nodes − 1

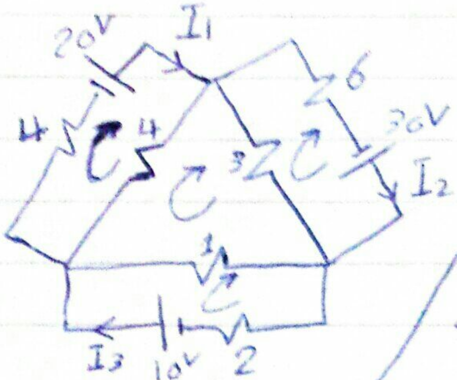
$$\boxed{\therefore \#\text{loops} = b - (n-1)}$$

Read Section 4.1 in Reference for details

P.3 إذا وجدت أن عدد الـ Loops أكبر من 3 . يحق لك استخدام أي Simplification method (series & parallel ، source transform ، $\Delta \rightleftarrows Y$) لتقليل عدد الـ Loops إلى 3 . ولكن اختار Simplification method بحيث لا تضيع حاجة كانت مطلوبة منك .

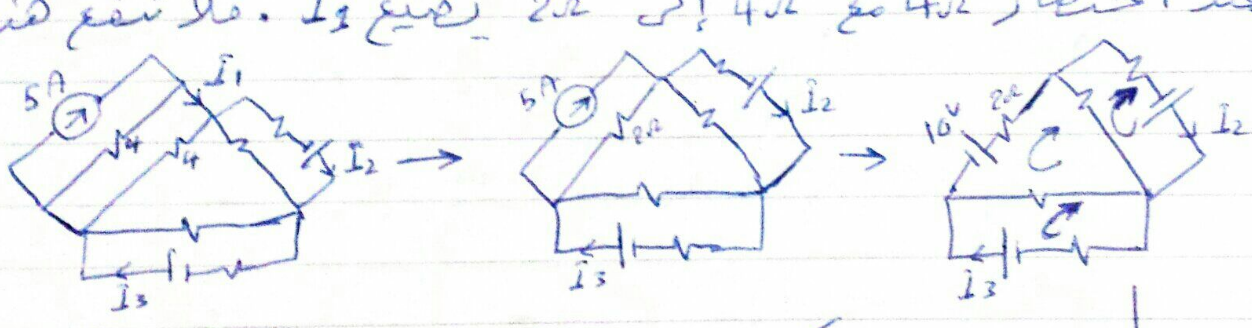
Ex:- Nov. 98 quiz :-

$n_e = 3,\ b_e = 6 \rightarrow \#\text{loops} = b_e - (n_e - 1) = 4$ loops



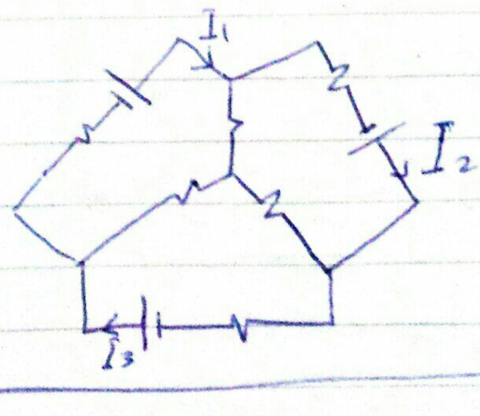
هنا نعمل Loop analysis . يوجد 4 Loops فهذا صعب نحل المحددات لذلك يحق لك استخدام طريقة من طرق الـ simplification لتقليل عدد الـ Loops إلى 3 ولكن مع عدم إضاعة I_3, I_2, I_1 المطلوبين منك . فنلاحظ أنه لا يوجد series أو parallel ولو حولنا أحد الـ Voltage sources إلى Current source مثلاً الـ 20V إلى 5A ، 4Ω تكون // مع الـ 4Ω الموجودة أصلاً فعند اختصار 4Ω مع 4Ω إلى 2Ω يضيع I_1 . فلا تنفع هذه الطريقة

* get I_1, I_2, I_3 using Loop analysis *



3 loops ولكن فين I_1 اللي كان مطلوب ؟!!

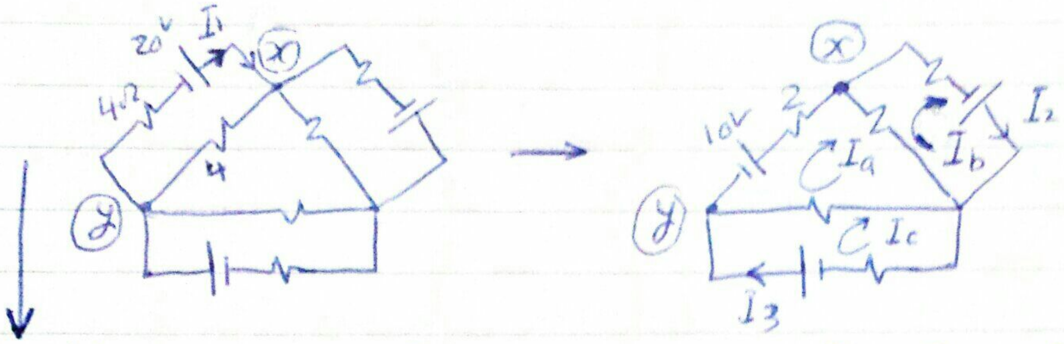
* ولكن لو حولنا الـ Δ المكونة من (1Ω, 4Ω, 3Ω) إلى star سنقلل عدد الـ Loops إلى 3 وفي نفس الوقت لن يضيع أي من I_1, I_2, I_3 .



$\boxed{P.4}$ ولكن إذا كان أي simplification method هتضيع أحد المطاليب منك،

فاعملها و حاول الحصول على هذا المطلوب من الدائرة الجديدة.

مثال :- في المثال السابق عند تحويل 5A,4Ω إلى 20V,4Ω فقدنا I_1
و لكن كان من الممكن أن نحصل عليه من الدائرة الجديدة كالتالي



$$V_{xy} = 20 - 4I_1$$

$$I_1 = \frac{20 - V_{xy}}{4}$$

$$I_2 = I_b \quad , \quad I_3 = I_c$$

$$V_{xy} = 10 - 2I_a$$

$$I_1 = \frac{20 - V_{xy}}{4} = \frac{10 + 2I_a}{4}$$

لاحظ :- عند التحويل من 5A,4Ω إلى 20V,4Ω ثم إلى 10V,2Ω

لم تضيع ال nodes (y , x)

ملحوظة هامة جداً :-

إذا كان عدد ال Loops = 3 ، **فلا يحق** لك عمل أي
simplification method لتقليل عدد ال Loops عن ذلك.

يعني استخدم ال simplification فقط لتقليل عدد ال Loops
إلى 3 وليس لأي **هدف آخر**.

يعني لو عدد ال Loops = 3 ، **لا تفعل** أي Simplification method.

Step. 2 بعد تحديد الـ loops، افرض في كل loop اتجاه لـ loop current فيها، بحيث تكون اتجاهات كل الـ loop currents إما مع عقارب الساعة (وهذا ما نفعله عادة) أو كلهم ضد عقارب الساعة. ودا علشان نسهل على نفسنا مش أكتر. يعني ممكن جداً نفرض اتجاه الـ loop currents في إحدى الـ loops مع عقارب الساعة وفي loops أخرى عكسها

STEP. 3 كوّن $[V]$, $[R]$ كالتالي :-

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \rightarrow$$ here, R_{ij} means the element in the i^{th} row and j^{th} Column in matrix $[R]$.

$\boxed{R_{ii}}$ ← العنصر الذي يقع في صف رقم i وعمود رقم i، نحصل عليه بتجميع كل المقاومات الموجودة في Loop no. i. ونضع الرقم الناتج في الـ matrix بإشارة **موجبة**.

$\{R_{ii}\} \equiv \{R_{11}, R_{22}, R_{33}\}$ هي عناصر الـ diagonal.

$\boxed{R_{ij}}$ $i \neq j$ ← العنصر الذي يقع في صف رقم i وعمود رقم j، نحصل عليه بتجميع كل المقاومات المشتركة بين i loop و j loop. ونضع الرقم الناتج في الـ matrix بإشارة سالبة لو I_i و I_J يمروا عكس بعض في هذه المقاومات المشتركة، وبإشارة موجبة لو I_i و I_J يمروا في نفس الاتجاه في هذه المقاومة المشتركة

* $[R]$ is Symmetric, i.e., $R_{ij} = R_{ji}$

* Diemensions of $[R]$ is $n \times n$, where, $n \rightarrow$ # Loops.

* R_{ij} , R_{ii} ← ليسوا مقاومات ولكن تجميع مقاومات مع بعض.

$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$, here, V_i means the element in the i^{th} row in $[V]$

$\boxed{V_i}$ ← هو مجموع كل البطاريات في Loop-i ، كل بطارية

بإشارتها كالتالي :- نرسم لكل Battery سهم معبر من ال ⊖

إلى ال ⊕ { ⊣|⊢ } وإذا كان سهم ال Battery مع اتجاه ال Loop

نجمع قيمة هذه ال Battery بالموجب وإذا كان ضد اتجاه ال Loop

بالسالب. " " " "

" V_1 , V_2 , V_3 ← ليسوا جهود نقط وليسوا

بطاريات ولكن تجميع بطاريات مع بعض.

$\boxed{\text{STEP-4}}$

$[R][I] = [V]$

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$I_1 = \frac{\Delta 1}{\Delta R}$	$I_2 = \frac{\Delta 2}{\Delta R}$	$I_3 = \frac{\Delta 3}{\Delta R}$

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \Leftarrow |R|$$ ناتج فك المحددة ← ΔR *

↓

$$\begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \Leftarrow |\Delta_1|$$ ناتج فك المحددة ← $\Delta 1$ *

لتكوين $\Delta 1$ نستبدل العمود الأول من $[R]$ بالعمود بتاع $[V]$.

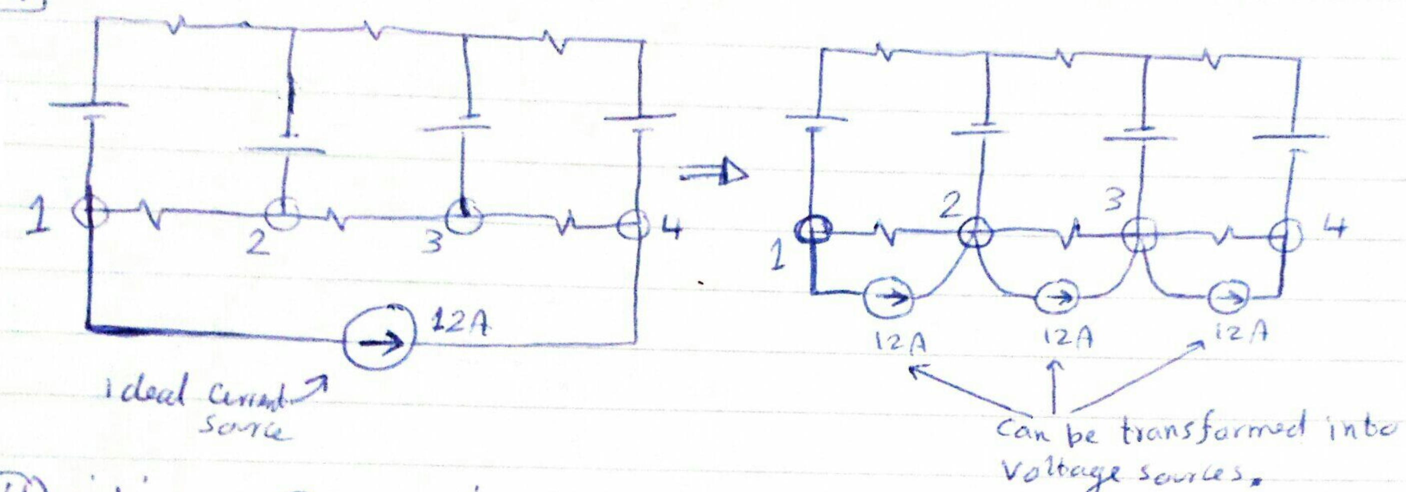
وهكذا بالنسبة لـ Δ_2 (استبدال العمود الثاني بـ $[V]$) و Δ_3 (استبدال العمود الثالث بـ $[V]$)

NOTES

1

* if you found ideal current source [can not be transformed into voltage source], this problem can be handled by 2 methods, one of them will be studied in the next term. and, in this term, we will see the other.

EX



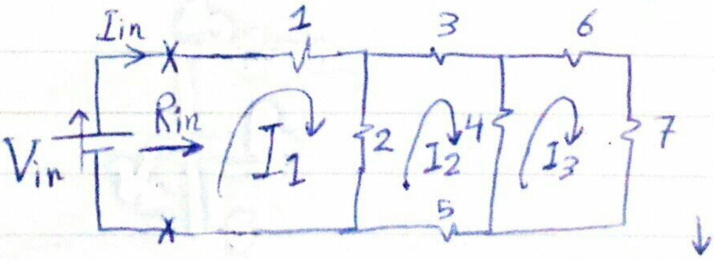
12A يخرج من ① ويدخل في ④
ولا يتم التعامل معه في ② و ③

12A يخرج من ① ويدخل في ④
ويدخل ويخرج في نفس الوقت في ② و ③
لذلك لا تحس به ② أو ③ .

---

2 Get R_{in} using Loop analysis.

$$R_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}}$$



$[R][I] = [V]$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 14 & -4 \\ 0 & -4 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta R} \Rightarrow |\Delta_1| = \begin{vmatrix} V_{in} & -2 & 0 \\ 0 & 14 & -4 \\ 0 & -4 & 17 \end{vmatrix}$$

$$\Delta 1 = V_{in} * [(14*17) - (-4*-4)] \rightarrow I_1 = V_{in} * \frac{[(14*17) - (-4*-4)]}{\Delta R}$$

note:- $I_{in} = I_1 \Rightarrow I_{in} = V_{in} * \frac{[(14*17) - (-4*-4)]}{\Delta R} = V_{in} * \frac{\Delta 11}{\Delta R}$

$\therefore I_{in} = V_{in} * \frac{\Delta 11}{\Delta R} \longrightarrow R_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}}$

$$\boxed{\therefore R_{in} = \frac{\Delta R}{\Delta 11}}$$

ما هي $\Delta 11$ ؟ ⟸ هي $[(14 * 17) - (-4 * -4)]$

وهي ناتج فك المحددة $\begin{vmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 17 \end{vmatrix}$ ، هذه المحددة ظهرت

من حذف الصف الأول , العمود الأول من ΔR لذلك

رقم الصف المحذوف ←

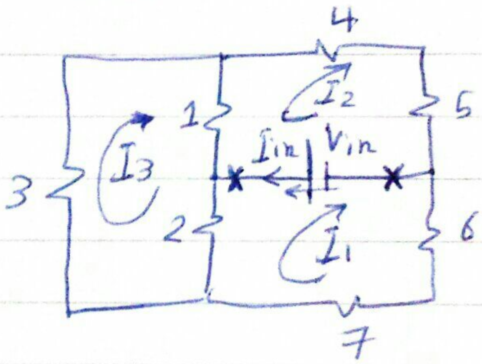
أطلقنا عليها $\Delta 11$. $\boxed{\Delta 11 \text{ تسمى } \leftarrow \text{CO-FACTOR}}$

رقم العمود المحذوف ←

* لاحظ هنا أن البطارية V_{in} لم تكن مشتركة بين Loop.1 , أي Loop

فماذا لو كانت مشتركة ؟! كالمثال الآتي :-

EX:-



$R_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = \frac{V_{in}}{I_2 - I_1}$

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & -2 \\ 0 & 10 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{in} \\ V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$I_1 = \frac{\Delta 1}{\Delta R}$, $|\Delta 1| = \begin{vmatrix} -V_{in} & 0 & -2 \\ V_{in} & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -V_{in} * (60 - 1) + V_{in} * (-1) * (0 * 6 - (-2 * -1))$

$= -57 V_{in}$

$I_2 = \frac{\Delta 2}{\Delta R}$, $|\Delta 2| = \begin{vmatrix} 15 & -V_{in} & -2 \\ 0 & V_{in} & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -V_{in} * (-1) * (-2) + V_{in} * (15 * 6 - (-2 * -2))$

$= 84 V_{in}$

$\therefore I_{in} = I_2 - I_1 = \frac{84 V_{in}}{\Delta R} - \frac{(-57 V_{in})}{\Delta R} = \frac{141}{\Delta R} V_{in}$

$I_{in} = \frac{141}{\Delta R} V_{in} \longrightarrow R_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = \frac{\Delta R}{141}$